

deel 2 Invariantie

Constructie planimetrie toetsenbord.

Als eerste opzet construeren we 2 soorten kolommen, type I en type II, uitgaande van het gegeven dat iedere toets wordt omgeven door 6 andere toetsen, en uitgaande van 2 rijen per interval bestaande uit exponentiële reeksen van leidtoon-intervallen. Zowel rijen als kolommen verlopen diagonaalsgewijs.

De constructie verloopt als volgt (zie figuur e):

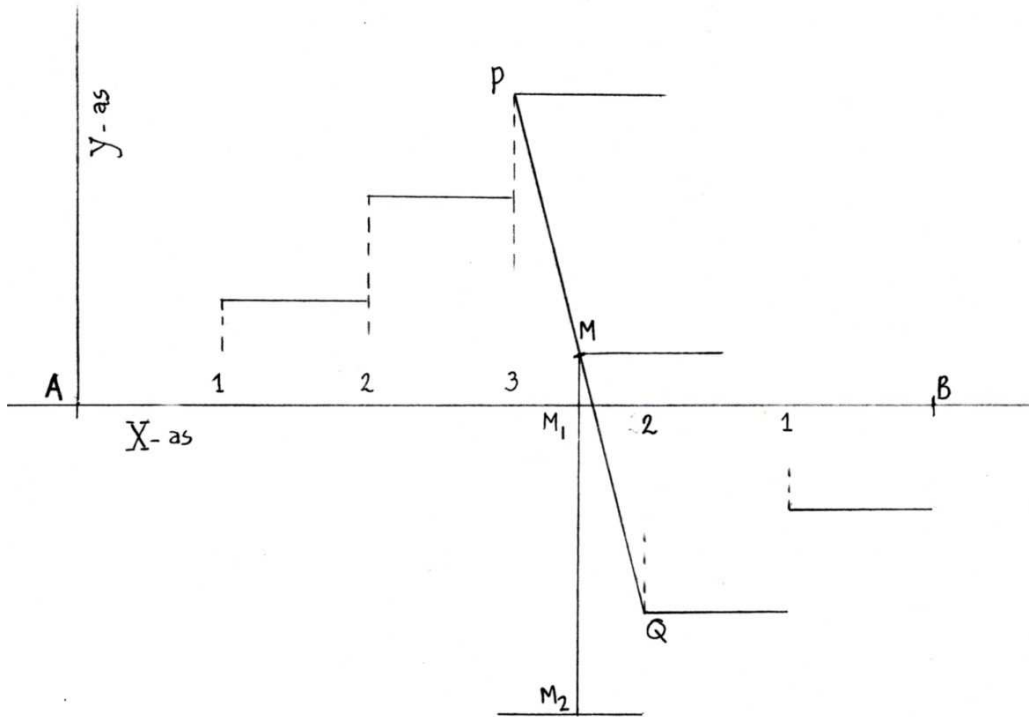


Fig. e

We kiezen een bepaald interval, bijvoorbeeld het octaaf, hetgeen volgens de eerder geformuleerde vergelijkingen volgt uit $x = 3$. We tekenen een horizontale lijn, de X-as. Op deze lijn bepalen we de breedte A-B van het octaaf-interval: 16,5 cm. Op dit lijnstuk beginnen we van links naar rechts vanaf A de breedtes van de leidtoonintervallen af te strepen. Het aantal malen dat we dit doen is de waarde van $x = 3$. Vanaf de eerste streep gaan we 2 cm // de Y-as omhoog, evenzo bij de tweede en derde streep, zodat we bij P aankomen, dat zich dus op $3 \cdot 2 = 6$ cm afstand van de X-as bevindt. Vervolgens dezelfde procedure vanaf B, maar dan van rechts naar links, maar dan $(x-1)$ maal, is dus 2 maal. Dit geeft Q, op afstand van 4 cm onder de X-as. Vervolgens tekenen we lijnstuk PQ en bepalen het midden van dit lijnstuk $= M$. De projectie van M op de X-as is M_1 . Dit punt M_1 markeert precies de grens tussen de major en de minor van het interval, in dit geval, namelijk voor $x = 3$, grenzen de kwint en de kwart hier aan elkaar. Trekken we het lijnstuk M- M_1 nu door totdat we op de bovengrens van de eerstvolgende toets na $(x - 1) = 2$ hetgeen dus $(x - 1) + 1 = 3$ komen, dan vinden we de lengte van de toets, die de bouwsteen van de gehele planimetrie vormt.

De projectie van PQ in cm op de Y-as is gelijk aan $2[x + (x-1)] = 4x - 2$. De lengte van de toets is echter $(4x - 2)/2 + 2 = (2x + 1)$ cm. Voor $x = 3$ is de toetslengte 7 cm.

Feitelijk zijn er nu 3 rijen geconstrueerd. De bovenste en de middelste rij vormen het interval inclusief de van dit interval afgeleide subintervallen, waarvan we zijn uitgegaan. De onderste rij vormt als het ware de aanloop naar het eerstvolgende interval, dat grenst aan het interval waarvan we zijn uitgegaan, met dezelfde afmetingen. We verkrijgen dan van links naar rechts een aaneenschakeling als volgt:

interval - interval¹ - interval¹¹ - interval¹¹¹ - enzovoort.

In beginsel is het nu ook mogelijk om het aantal rijen naar boven en naar beneden uit te breiden.

Voor andere waarden van x geldt de navolgende berekeningsprocedure voor de bepaling van de intervalbreedte en de toetsbreedte:

$$\begin{aligned} \text{Intervalbreedte} &= 16,5 / \log 2 / \log \text{interval} \\ &= \log \text{interval} / \log 2 \cdot 16,5 \text{ cm.} \\ \text{toetsbreedte} &= \text{intervalbreedte} / \log \text{interval} / \log \text{leidtoon} \\ &= \log \text{leidtoon} \cdot \text{intervalbreedte} / \log \text{interval cm.} \end{aligned}$$

De hierna volgende figuren tonen ons de planimetrieën voor de x -waarden van 2, 3, 4 en 5.

$$x = 2$$

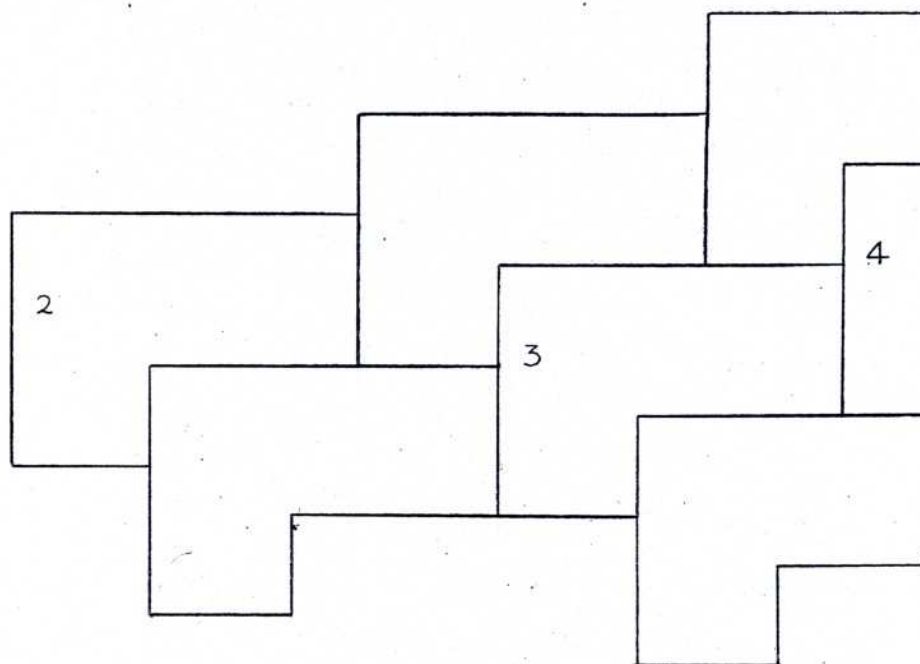


Fig. f

In figuur f zien we de major $2/1 = 4/2$ van het interval $3/1 (= 6/2)$. Feitelijk zien we hier de anhemitoonse pentatonische toonladder in reine stemming: op de bovenste rij de opeenvolging van de leidtoon-intervallen $c-f$, f -bes, en op de rij daaronder: $d-g$, $g-c^1$, zodat dus tot aan c^1 daarbij betrokken zijn de noten c , f , bes / d , g .

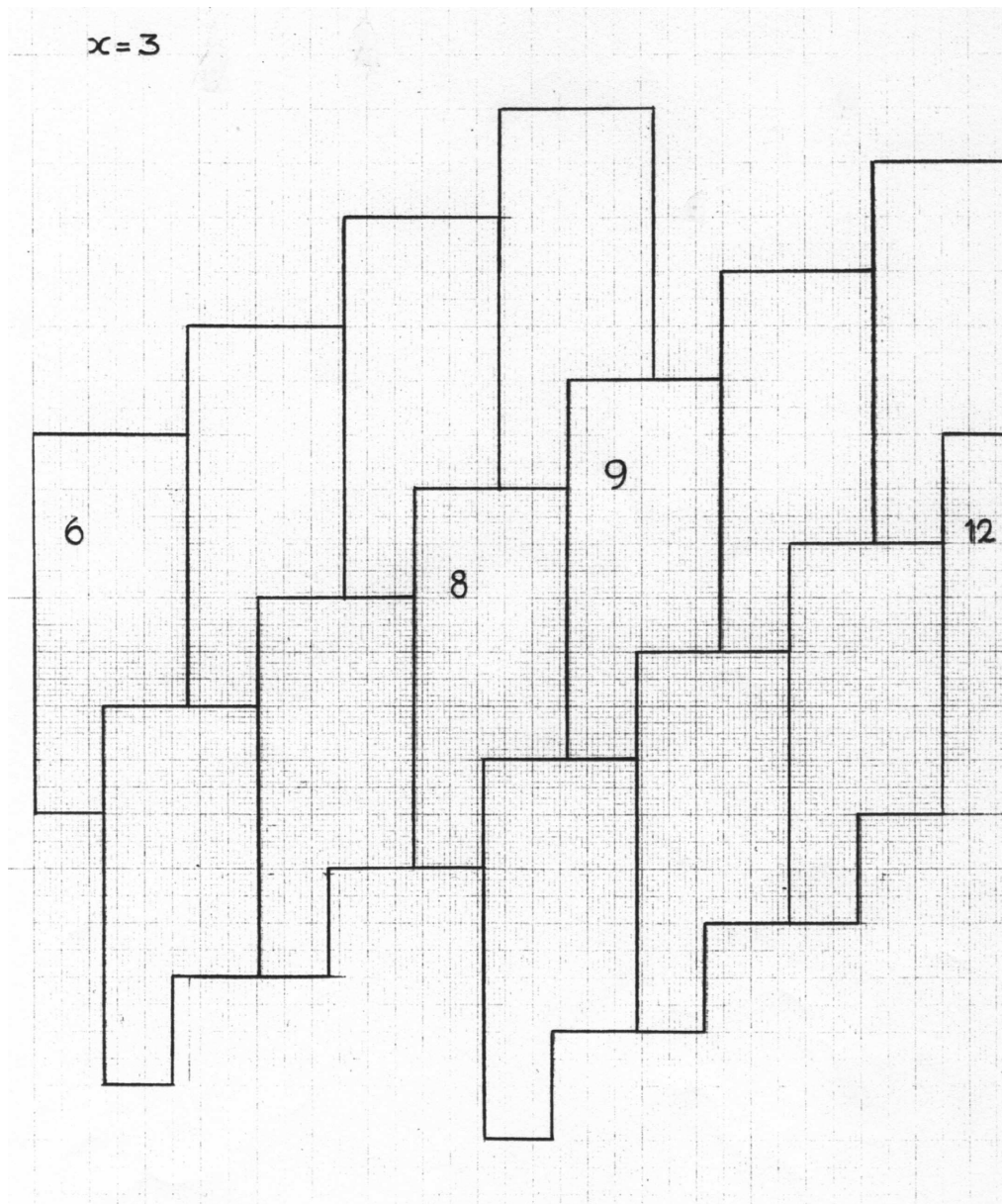


Fig. g

De cijfers in de afbeelding vormen de verhoudingsgetallen der intervallen.

Wanneer het octaaf (12/6) 16,5 cm wordt gedacht te zijn, dan is de breedte van een enkele toets afgerond gelijk aan 2,8 cm.

Ter vergelijking: de toetsbreedte van een witte toets op de 12-toons piano is $16,5/7 = 2,35$ cm.

Wanneer we de bovenste rij toetsen van links naar rechts volgen tot aan het einde van de minor, en van daar overstappen op die toets die het eindpunt van de minor markeert en vandaar uit verder gaan tot aan het einde van het octaaf-interval, dan hebben we 7 toetsen die tezamen de 7-tonige pythagoreïsche toonladder vormen. Noemen we de meest linkse toets c, dan bestaat deze tonenreeks dus uit: c-d-e / f-g-a-b.

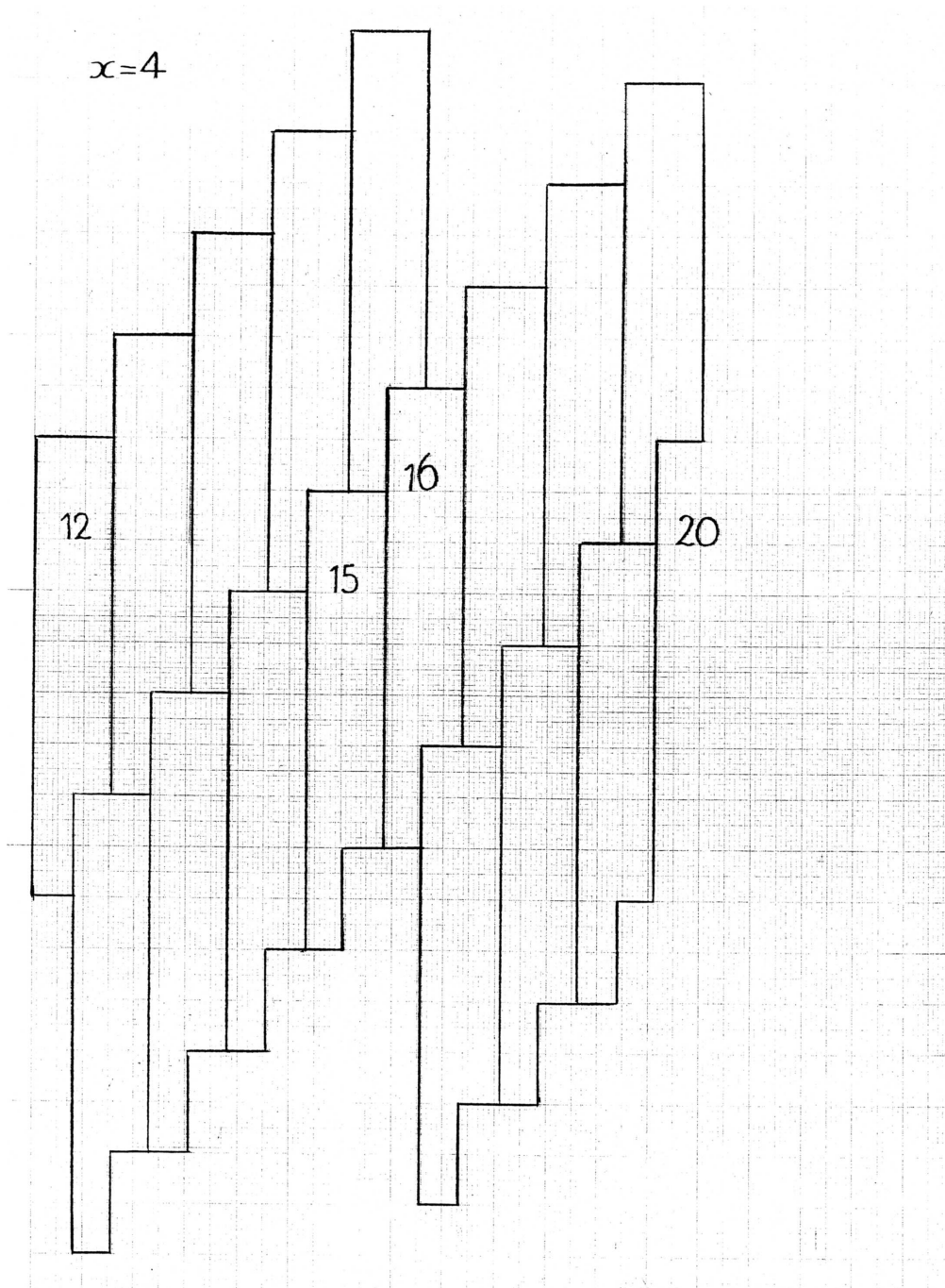


Fig. h
 Deze toetsenconstellatie leent zich voor het zichtbaar maken – zij het slechts fragmentarisch! - van een zogenaamde zigeunertonladder, waarin immers verschillende diatonische halve toons afstanden voorkomen. De zigeunertonladder impliceert een hemitons vijftonige gamelantonladder.
 Reine grote terts geeft in samenhang met de kwart een diatonische halve toon.

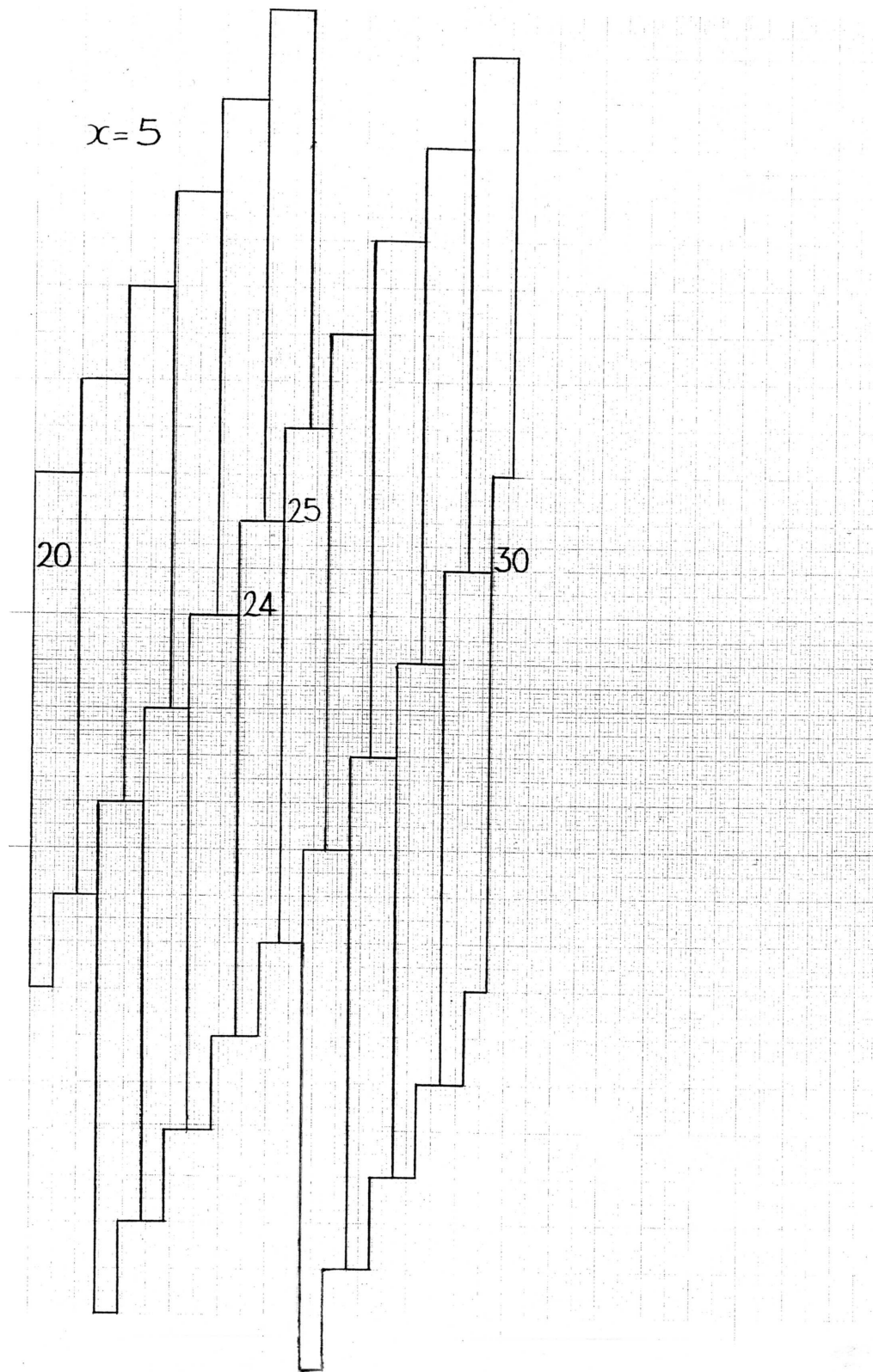


Fig. i
Kwinten, grote en kleine reine tertsen, en de chromatische halve toon.

Eigenschappen van planimetrieën bij gegeven x-waarden .

Vervolgens onderzoeken we de nadere eigenschappen van de aldus geconstrueerde planimetrieën.

Hiervoor is al vastgesteld dat er, naast rijen, 2 soorten kolommen, type I en type II, onderscheiden kunnen worden, uitgaande van het gegeven dat iedere toets wordt omgeven door 6 andere toetsen, en uitgaande van 2 rijen per interval bestaande uit exponentiële reeksen van leidtoon-intervallen. Zowel rijen als kolommen verlopen diagonaalsgewijs, en daarom bestaat er geen principieel verschil tussen rijen en kolommen, omdat ze alle diagonaalsgewijze voorkomen in de planimetrie. Het blijkt nu dat het aantal rijen dat de X-as binnen een gegeven interval snijdt steeds gelijk is aan 2. Het aantal kolommen van type I dat binnen een interval de X-as snijdt bedraagt $(2x - 1)$, en het aantal kolommen van type II dat de X-as binnen een interval snijdt, bedraagt $(2x + 1)$. Zie figuren f, g, h en i; in figuur j zijn de aantallen van de kolommen type I en IIanschouwelijk voorgesteld.

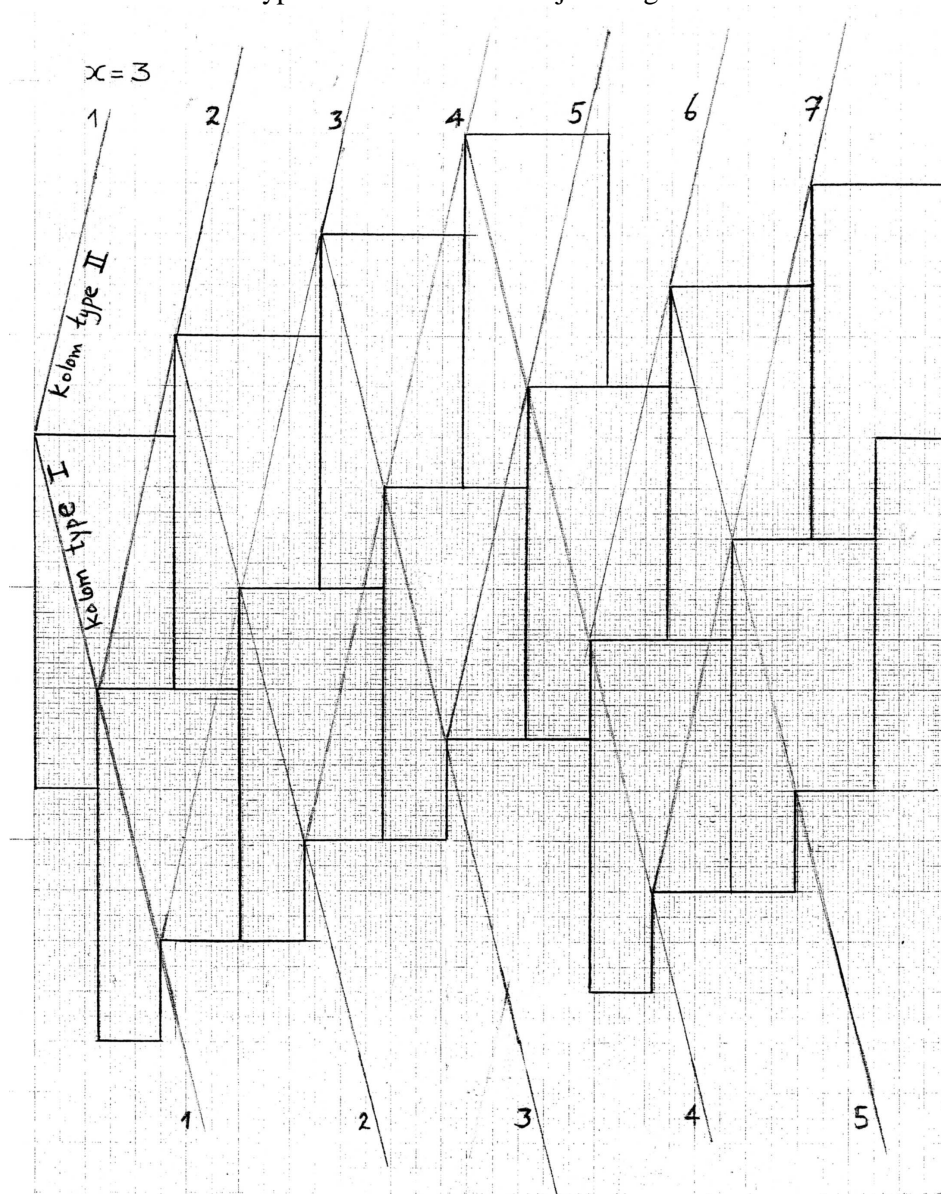


Fig. j

In de planimetrie zijn ook kolommen te onderscheiden waarvoor geldt dat de toetsen niet aan elkaar grenzen. Het aantal kolommen van dit type, dat de X-as snijdt, blijkt $4x$ te zijn, met andere woorden de som van $(2x - 1)$ en $(2x + 1)$. In figuur k is dit voor kolomtype III uitgebeeld voor de waarde van $x = 3$; het aantal kolommen type III dat de X-as snijdt bedraagt dus 12. Ook wordt nu nog een andere wetmatigheid duidelijk, namelijk:

De projectie op de Y-as van de afstand tussen 2 opeenvolgende toetsen van een kolom van een bepaald type, is gelijk aan het aantal kolommen van dit type dat de X-as snijdt.
 De afstand tussen twee opeenvolgende toetsen van kolomtype III bij de waarde van $x = 3$ is dus $4 \cdot 3 = 12$ cm.

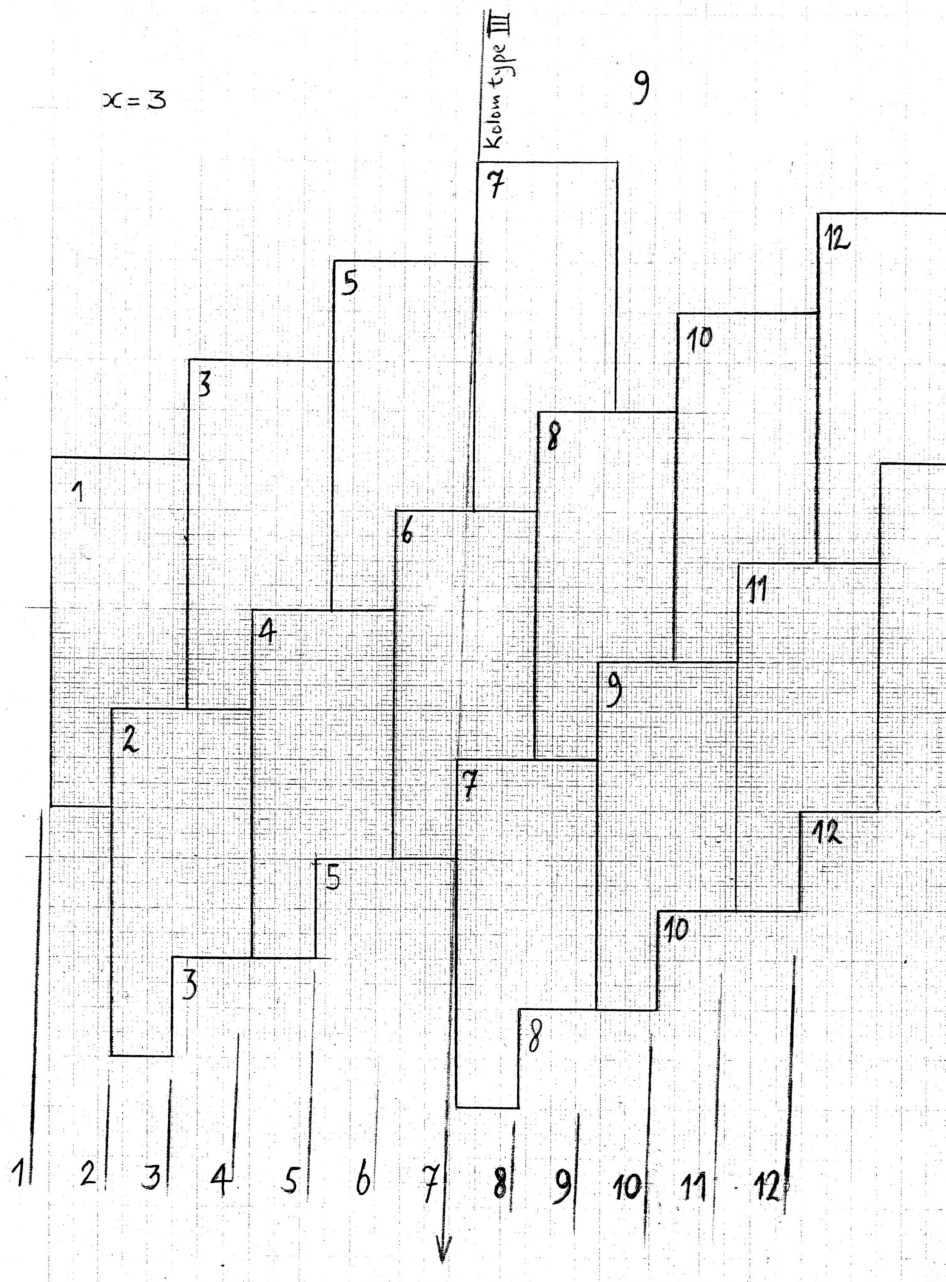


Fig. k

De vectoriële richtingen van de kolomtypes I, II, III enzovoort volgen in hun onderlinge posities ook een bepaalde wetmatigheid. Beginnen we te beschouwen de vectoriële richtingen van achtereenvolgens de rijen en kolom type I, dan ligt de vectoriële richting van kolom type II binnen de hoek die de beide voorgaande vectoriële richtingen met elkaar vormen. Dit geldt ook voor de hoek van de vectoriële richting van kolom type III ten opzichte die van II en I, enzovoort. In toenemende mate zullen de hoeken van de verschillende kolomtypen ten opzichte van de Y-as kleiner worden, als is er ook een zekere fluctuatie binnen de grenzen, die steeds worden bepaald door de hoeken der vectoriële richtingen van de kolommen.

In de voortgang van de detectie van nog andere typen kolommen (IV, V, VI enzovoort) is er nu meer dan slechts 1 weg. Immers de aantallen van een bepaald type kolommen komt voort uit optelling van de aantallen kolommen der voorafgaande types. Uit optelling van het aantal rijen en het aantal kolommen type I volgt het aantal kolommen type II; en uit optelling van de aantallen van type I en II volgt het aantal kolommen type III. Om nu de aantallen te vinden van de hierna volgende typen kolommen, kunnen we nu twee wegen volgen, namelijk:

- optellen $(2x + 1) + 4x$; vervolgens $4x + (6x + 1)$; enzovoort.
- optellen $(2x - 1) + 4x$; vervolgens $4x + (6x - 1)$; enzovoort.

De eerste mogelijkheid levert de navolgende reeks op:

interval	major	minor	leidtoon-interval
2	1	1	$1 - 1 = 0$
$(2x - 1)$	x	$(x - 1)$	$x - (x - 1) = 1$
$(2x + 1)$	$(x + 1)$	x	$(x + 1) - x = 1$
4x	$(2x + 1)$	$(2x - 1)$	$(2x + 1) - (2x - 1) = 2$
$(6x + 1)$	$(3x + 2)$	$(3x - 1)$	$(3x + 2) - (3x - 1) = 3$
$(10x + 1)$	$(5x + 3)$	$(5x - 2)$	$(5x + 3) - (5x - 2) = 5$

etc.

Het kolommenaantal per $x^2 / (x^2 - 1)$ is onafhankelijk van x, hetgeen een invariante eigenschap is voor elke planimetrie.

In de getallenreeks van dit leidtoon-interval $x^2 / (x^2 - 1)$ herkennen we de rij of reeks van Fibonacci.

Voorts blijkt betreffende de kolommenaantallen per gegeven interval invariantie te bestaan voor verschillende x-waarden. Dit komt aan het licht door de verschillende aantallenreeksen voor verschillende x-waarden met elkaar te matchen.

In onderstaand overzicht per x-waarde achtereenvolgens interval, major, minor, leidtoon-interval.

Octaaf, kwint, kwart

x = 2	x = 3	x = 4	x = 5	x = 7
2 1 1 0				
3 2 1 1				
5 3 2 1	2 1 1 0			
8 5 3 2	5 3 2 1	2 1 1 0		
13 8 5 3	7 4 3 1	7 4 3 1	2 1 1 0	
21 13 8 5	12 7 5 2	9 5 4 1	9 5 4 1	
34 21 13 8	19 11 8 3		11 6 5 1	2 1 1 0
55 34 21 13	31 18 13 5			13 7 6 1
				15 8 7 1

Grote tert

x = 4	x = 5	x = 9
2 1 1 0		
7 4 3 1	2 1 1 0	
9 5 4 1	9 5 4 1	
16 9 7 2	11 6 5 1	
25 14 11 3	20 11 9 2	2 1 1 0
	31 17 14 3	17 9 8 1
		19 10 9 1

Substitutie als toepassing in geval van invariantie

Toepassing van bovenstaande uitkomsten geeft ons de mogelijkheid substitutie toe te passen.

Expressie van het leidtoon-interval $x^2 / (x^2 - 1)$ voor de waarde van $x = 9$ geeft onder andere als resultaat:

17 9 8 1

Hier staat dus dat het interval $5/4$ verdeeld kan worden in een major met 9 kolommen en een minor met 8 kolommen, en voorts dat het leidtooninterval $81/80$ wordt vertegenwoordigd door 1 kolom.

Voor $x = 5$ vonden we onder andere een verdeling van het interval $3/2$ in 31 kolommen, welke op hun beurt verdeeld kunnen worden in 17 kolommen voor het interval $5/4$ en 14 kolommen voor het interval $6/5$. Het leidtoon-interval, in dit geval de chromatische halve toon $25/24$, wordt door 3 kolommen vertegenwoordigd.

31 17 14 3

Nu kunnen we substitutie toepassen: $17 = 9 + 8$.

Voor de waarde van $x = 4$ kunnen we de alternatieve procedure volgen, namelijk:

- optellen $(2x - 1) + 4x$; vervolgens $4x + (6x - 1)$, enzovoort.

Dit leidt tot de navolgende reeks:

Voor $x = 4$

2	1	1	0
9	5	4	1
7	4	3	1
16	9	7	2
23	13	10	3
39	22	17	5

Hier staat dat het $5/3$ interval 39 kolommen vertegenwoordigt, welke te verdelen zijn in de major $4/3$, bestaande uit 22 kolommen en de minor $5/4$, bestaande uit 17 kolommen. Ook hier kunnen we substitutie toepassen: $17 = 9 + 8$.

Aangezien we voor $x = 5$ reeds vonden:

31	17	14	3
----	----	----	---

kunnen we nu stellen dat het interval $6/5$ gelijk is aan 14 kolommen. Aangezien de grote sext en de kleine tert samen een octaaf vormen, volgt hier uit:

$$39 + 14 = 53.$$

Ook voor de waarde van $x = 2$ kunnen we de alternatieve procedure volgen, namelijk:

- optellen $(2x - 1) + 4x$; vervolgens $4x + (6x - 1)$, enzovoort.

$x = 2$

2	1	1	0
5	3	2	1
3	2	1	1
8	5	3	2
11	7	4	3
19	12	7	5
30	19	11	8
49	31	18	13

Uit bovenstaande reeksen volgt de correspondentie met de uitkomsten van de eerste procedure voor $x = 3$. De major van $x = 2$ is het interval van $x = 3$. En de minor van $x = 2$ is de major van $x = 3$. En het leidtoon-interval van $x = 2$ is de minor van $x = 3$.

Vervolgens beschouwen we het navolgende:

$$x = 3$$

31 18 13 5

$$x = 7$$

13 7 6 1

Het kwart-interval $4/3$ bestaat uit 13 kolommen en omvat major = $7/6$ en minor = $8/7$ met resp. 7 en 6 kolommen.

Voor $x = 4$ verkrijgen we bij de tweede procedure:

23 13 10 3

De kwart $4/3$ wordt vertegenwoordigd door 13 kolommen en de grote tert $5/4$ door 10 kolommen.

De grote sext = $5/3$ bestaat dan uit 23 kolommen. Aangezien voor $x = 3$ geldt:

31 18 13 5

kunnen we hieruit afleiden dat de kleine tert $6/5$ wordt vertegenwoordigd door 8 kolommen.

Aldus kunnen wij een octaaf construeren door $6/5$ bij $5/3$ op te tellen: $23 + 8 = 31$.

Conclusie: voor $x = 4$ is het mogelijk octaven te construeren met kolommen aantallen van zowel 31 als 53; voor een octaaf verkrijgen we dan de reeks:

9
22
31
53

Op overeenkomstige wijze is het met bovenstaande gegevens mogelijk aan te tonen dat voor $x = 5$ octaven te construeren zijn met 19, 34 en 53 kolommen.

Nu kan de eerste procedure worden toegepast:

- optellen $(2x + 1) + 4x$; vervolgens $4x + (6x + 1)$; enzovoort.

Voor de kwint krijgen we:

```
 9  5  4  1
11  6  5  1
20 11  9  2
31 17 14  3
```

De getallen (11 6 5 1) corresponderen met 19 e.t., (20 11 9 2) met 34 e.t., en (31 17 14 3) met 53 e.t.

Vergelijking van planimetrieën $x = 3$, $x = 4$ and $x = 5$ laat zien dat vooral de kolommen aantallen per octaaf 31, 53 and 19 naar voren komen.

Het aantal 31 rijst op uit $x = 2$, $x = 3$, $x = 4$ en $x = 7$. Let wel 4 maal!

Het aantal 53 rijst op uit $x = 4$, $x = 5$ and $x = 9$.

En het aantal 19 rijst op uit $x = 2$, $x = 3$ and $x = 5$.