SYSTEMATIEK
PROJECTIE INTERVALREEKSEN
OP
PLANIMETRIE TOETSENBORD

Gjalt Wijmenga

2011

Inhoud:

3 Voorgeschiedenis
3 Verantwoording
4 **Deel 1 Begripsvorming**
- 4 Probleemstelling
- 5 Definities en deducties; intervallen en hun onderlinge samenhang
- 9 Christiaan Huygens

11 **Deel 2 Invariantie**
- 11 Constructie planimetrie toetsenbord
- 16 Eigenschappen van planimetriën bij gegeven x-waarden
- 19 Substitutie als toepassing in geval van invariantie

23 **Deel 3 Evaluatie toetsenbordontwerpen**
- 23 Gegeneraliseerd toetsenbord
- 23 Vergelijking in cents van zuivere intervallen met de getempereerde intervallen uit 12 e.t., 19 e.t., 31 e.t. en 53 e.t.
- 24 Indexering kolommen op een toetsenbord
- 28 Toetsenbordontwerpen & afbeeldingen / figuren
- 42 Vergelijking toetensbordontwerpen
- 42 Resolutie

Voorgeschiedenis
Sinds 1995 heeft zich een microtonale werkgroep gevormd, bestaande uit Sjoerd Brunia, Siemen Terpstra, Gert Vos, Leo de Vries, Gjalt Wijmenga.
Nadat we met elkaar hadden kennisgemaakt in 1994, hebben we met elkaar een microtonale werkgroep gevormd teneinde met elkaar te musiceren en met elkaar van gedachten te wisselen. Oorspronkelijk was hier ook Ferdie Schukking bij betrokken, zolang we nog ons bezig hielden met het gezamenlijk musiceren. Al spoedig begon het accent voornamelijk te liggen op het uitwisselen van gedachten over toetsenbordontwerpen. In dit opzicht had Siemen Terpstra al een hele voorgeschiedenis, want hij had reeds omstreeks 1990 een toetsenbord ontworpen, bestaande uit hexagonale toetsen in een grondpatroon dat te relateren is aan zowel het ontwerp van R. H. M. Bosanquet als dat van A. D. Fokker. Er zijn echter kenmerkende verschillen met de voorgaande ontwerpen en een belangrijk aspect hierbij is "inversie" van het patroon dat voordien ten grondslag lag aan de voorgaande ontwerpen. Over het begrip inversie – reeds eerder voorgesteld door Erv Wilson - zal later, bij de bespreking van de diverse mogelijke toetsenbordontwerpen, worden ingegaan. Naast de ontwerpen van Siemen Terpstra kwamen aan bod het ontwerp van Leo de Vries en dat van Gert Vos. De uitgangspunten van al deze drie ontwerpen zijn onderling verschillend. Reden voor schrijver dezes om te zoeken naar achterliggende gronden, die de verschillende benaderingen met elkaar kunnen verbinden. Dit heeft er ook weer toe geleid dat ondergetekende een variant op het ontwerp van Siemen Terpstra heeft ontwikkeld.
Van de ontwerpen zijn ook maquettes vervaardigd die d.d. 1996 in het Teylers Museum te Haarlem tentoongesteld werden ter gelegenheid van het 50-jarig bestaan van de Stichting. Van de ontwerpen van Leo de Vries en Gert Vos zijn naderhand prototypes gebouwd, die bedoeld zijn als demonstratiemodel met de mogelijkheid van toonvoortbrenging.

Verantwoording
Omdat ik werd geconfronteerd met verschillende benaderingen die alle toch gedacht kunnen worden te zijn ontstaan vanuit dezelfde intentie in het streven naar een "universeel toetsenbord", ben ik aangevangen na te denken over theoretische en praktische aspecten. Zo kom ik dan met een wiskundige benadering, waarbij het gaat om het onderzoek naar een ideaal toetsenbordontwerp, waarbij denkgewoonten overwonnen dienen te worden zodra een aantoonbaar beter concept kan worden gepresenteerd. Schrijver dezes gaat ervan uit dat, op zoek naar een samenhangend inzicht, het met de gedachten doordringen in de materie kan leiden tot het vinden van ideeën, die, onafhankelijk, ook door anderen reeds gevonden zouden kunnen zijn, hetzij reeds eerder, hetzij tezelfdertijd. Met andere woorden: ideeën, inzichten, worden niet door een enkel individu "geproduceerd", maar ontdekt, gevonden! Echte inzichten kunnen door iedereen worden gedeeld, zodra ze worden ingezien. Een discussie erover acht ik alleen maar van belang om scherper te kunnen focussen. Vandaar dan ook deze beschouwing.
Het hele verhaal valt uiteen in 3 delen.
Het eerste deel zal gaan over de formulering van de probleemstellingen, en, als voorbereiding op de 2 erna volgende delen, definities en deducties, gevolgd door een korte schets over de betekenis van het denken van Christiaan Huygens. Het tweede deel is een uitwerking van het invariantie-beginsel toegepast op onderlinge samenhangen van evenredig zwevende stemmingen op een gegeven toetsenbordontwerp om uitsluitsel te geven over de mogelijkheden en onmogelijkheden.
Het derde deel gaat specifiek over toetsenbordontwerpen, dat wil zeggen de toepassing van de in deel 2 gevonden conclusies en een onderzoek naar eventuele verbeteringen van reeds bestaande ontwerpen.

deel 1 Begripsvorming

Probleemstelling

Op een klavierinstrument kunnen enkel zuivere intervallen worden gespeeld indien er *geen* sprake is van evenredig zwevende stemming. Afhankelijk van het aantal beschikbare toetsen per gegeven interval – in de regel het octaaf – kunnen echter, in geval van een evenredig zwevende stemming, de beoogde oorspronkelijke intervallen benaderd worden. Het voordeel van een evenredig zwevende stemming is dat er in het spel onbeperkt gemoduleerd kan worden. Hoe beter de benadering is, hoe hoger de resolutie (onderscheidend vermogen). De voorkeur moet worden gegeven aan een zo goed mogelijke benadering van *alle* beoogde intervallen, dat wil zeggen dat, om een willekeurig voorbeeld te noemen, het niet van zo'n groot belang is dat er incidenteel nauwkeurige benaderingen zijn, zoals bijvoorbeeld de kleine terts in een 19 e.t. stemming, wanneer het tegelijkertijd duidelijk is dat andere belangrijke intervallen zoals de kwint en de kwart er heel wat minder goed vanaf komen. Een totaalbenadering is dus datgene wat in deze beschouwing steeds op de voorgrond zal staan.
Nu gaat de zoektocht naar een **universeel** (Eng.: versatile) toetsenbord verder dan die naar een gegeneraliseerd toetsenbord, waarvan er inmiddels al vele varianten bestaan. Een gegeneraliseerd toetsenbord is een toetsenbord waarop de toetsen gelijkvormig zijn, en het eenvoudigste voorbeeld daarvan is het zogenaamde knoppenaccordeon. Het begrip "universeel" roept meteen al vragen op. In welk opzicht zou een gegeneraliseerd toetsenbord veelzijdig toepasbaar moeten zijn? Een denkbare optie is een gegeneraliseerd toetsenbord waarop alle denkbare evenredig zwevende of niet evenredig zwevende stemmingen gerealiseerd kunnen worden. Ieder te spelen interval heeft op een gegeneraliseerd toetsenbord een vectoriële richting, en deze richting kan op een universeel gegeneraliseerd toetsenbord wisselend zijn al naar gelang de evenredig zwevende stemming welke wordt toegepast. Dit is echter niet altijd zo, en in het geval dit niet zo is, spreken we van **invariantie**. Wanneer we spreken van interval-identiteit m.b.t. alle intervallen gerelateerd aan de toetsen waarmee deze worden gespeeld in een gegeven aantal bepaalde evenredig of niet evenredig zwevende stemmingen, dan is er sprake van invariantie. Dit is in de praktijk al bekend voor 12 e.t., 19 e.t. en 31 e.t. op het toetsenbordontwerp volgens het patroon – al of niet invers - van Bosanquet / Fokker / Wilson / Terpstra, of voor 19 e.t. en 53 e.t. op een van het Bosanquet / Fokker-patroon volkomen afwijkende toetsenbordplanimetrie. Door Gert Vos is anno 1995 nog een andere samenhang van evenredig zwevende stemmingen ontdekt, waarvoor invariantie geldt voor de te spelen intervallen.
Op een en hetzelfde gegeneraliseerde toetsenbord kunnen 12 e.t. en 31 e.t. gespeeld worden met behoud van dezelfde vingerzetting, dus met interval-identiteit, maar bijvoorbeeld niet i.c.m. 53 e.t. wanneer we alle intervallen met dezelfde toetsencombinaties willen blijven spelen. Het idee "gegeneraliseerd toetsenbord" houdt dus niet in dat er altijd sprake is van invariantie!
Wanneer we uitgaan van een toetsenbordplanimetrie bestaande uit verticale kolommen en horizontale rijen zoals het ontwerp van prof. A. D. Fokker, dan zouden we ons kunnen voorstellen dat in principe iedere verdeling van een octaaf toepasbaar is op deze planimetrie. Dat is inderdaad mogelijk, maar dan zonder behoud van octaaf-identiteit met betrekking tot de daarvoor benodigde toetsencombinatie. Ook de identiteit van andere intervallen met betrekking tot de van toepassing zijnde toetsencombinaties kan verloren gaan.
De zoektocht naar de oplossing van geschetste probleemstelling komt in het volgende, het tweede deel van deze beschouwing aan de orde.

Een ander probleem is de realisatie van een toetsenbord waarop de een of andere e.t. gerealiseerd kan worden. Hoe ziet de planimetrie er uit, dat wil zeggen: hoe verhouden zich de verschillende toetsen tot elkaar, hoe zijn deze geordend? Voor de ontwerpen van Bosanquet en Fokker geldt : 12 kolommen // Y-as (We denken de Y-as loodrecht op de X-as, welke laatste van links naar rechts verloopt). Voor de hand ligt dan ook te denken aan rangschikking toetsen // X-as; deze oplossing is door prof. A.D. Fokker gekozen, waarbij de vectoriële richting van het octaaf niet // is aan de X-as. Maar is een dergelijke onderlinge rangschikking der toetsen de enige denkbare oplossing? Het antwoord is nee, en uit Bosanquets oplossing bleek dit al eerder. In zijn ontwerp is de vectoriële richting van het octaaf // X-as. Dergelijke benaderingen en mogelijke andere oplossingen komen aan de orde in het derde en laatste deel van deze beschouwing.

Definities en deducties; intervallen en hun onderlinge samenhang

Zuivere intervallen worden gevormd door frequenties, van welke de onderlinge verhoudingen kunnen worden beschreven met behulp van eenvoudige gehele positieve getallen.
Uitgaande van het getal 1 als beginpunt kunnen wij deze gehele positieve getallen in een multidimensionaal continuüm volgens priemvectoren rangschikken, waarbij iedere richting bestaat uit een exponentiële reeks van intervallen: $(a/b)^n$. Wanneer we stellen b = 1, dan geldt: $(a/1)^n = a^n$. Met behulp van tweedimensionale doorsneden kunnen intervalsbetrekkingen worden onderzocht. Als eerste opzet priemgetal 2 op horizontale as:

					9		
		3		6		12	
1	2		4		8		16

Fig. a

In de volgorde der gehele getallen is 3 het getal dat vanuit het getal 1 een nieuwe vector-richting vormt. Bovenstaande getallenconfiguratie kan ook als volgt worden afgebeeld:

				8			
		4			12		
	2			6		18	
1			3		9		27

Fig. b

De figuren a en b zijn op logarithmische schaal, d.w.z. bij iedere machtsverheffing gelijke afstand. Beschouwen we in een 2-dimensionale doorsnede (matrix) van het oneindig universum der gehele getallen twee aan elkaar grenzende gelijkzijdige driehoeken (conform figuren a en b; zie hierboven), dan is het produkt van de twee getallen op de gemeenschappelijke zijden gelijk aan dat van de twee getallen op de middelloodlijn van die zijde die de tophoeken van beide driehoeken met elkaar verbindt. In de matrix gaat deze stelling niet slechts op voor gelijkzijdige driehoeken; ieder paar gelijkvormige driehoeken, waarvoor geldt dat ze een zijde gemeenschappelijk hebben en waarvan gelijkvormigheid kan worden aangetoond door middel van 180 graden rotatie om het midden van de gemeenschappelijke zijde, voldoet aan deze eigenschap.

N.B.: Het is ook mogelijk een driedimensionale doorsnede te maken met behulp van drie loodrecht op elkaar staande priemvectoren, bijvoorbeeld die van de getallen 3, 5 en 7.
Dit heeft prof. A. D. Fokker gedaan; het octaaf is daarbij weggelaten en grafisch kunnen kwinten/kwarten, reine grote en kleine tertsen alsmede aan de natuurseptiem gerelateerde intervallen grafisch worden voorgesteld.

De onderlinge samenhang van intervallen kan ook worden weergegeven door navolgende stamboom uitgaande van het octaaf-interval, waarbij de verdeling van intervallen volgens het rekenkundig midden blijkt.

01: 02
02 : 03 : 04
04 : 05 : 06 : 07 : 08
08 : 09 : 10 : 11 : 12 : 13 : 14 : 15 : 16
16 : 17 : 18 : 19 : 20 : 21 : 22 : 23 : 24 : 25 : 26 : 27 : 28 : 29 : 30 : 31 : 32

enzovoort.

Fig. c

Er is ook een stamboom van het octaaf-interval mogelijk, waarbij de verdeling van intervallen volgens een ander dan een rekenkundig midden zichtbaar wordt.

½ : 1
¼ : 1/3 : ½
1/8 : 1/7 : 1/6 : 1/5 : ¼
1/16:1/15:1/14:1/13:1/12:1/11:1/10:1/9:1/8
1/32:1/31: 1/30:1/29:1/28:1/27:1/26:1/25:1/24:1/23:1/22:1/21:1/20:1/19:1/18:1/17:1/16

enzovoort

Fig. d

De middens der intervallen, die aldus gevonden worden, noemen we harmonisch.
Vergelijken we nu fig. c en fig. d, dan zien we onderling een spiegelbeeldig patroon. In het eerste geval wordt het octaaf verdeeld in achtereenvolgens kwint en kwart, en in het tweede geval is de volgorde omgekeerd, zodat we achtereenvolgens verkrijgen kwart en kwint. Voor de verdeling van de kwint en de kwart geldt dezelfde omkering van volgorde, enzovoort.
Wanneer we nu beide stambomen van het octaaf-interval laten samenvallen, dan kunnen alle intervallen gedacht worden te kunnen worden verdeeld op twee manieren, namelijk volgens het rekenkundig midden en volgens het harmonisch midden. De verhouding tussen het harmonisch midden en het rekenkundig midden van een gegeven interval is eveneens een interval.
Wanneer we uitgaan van een gegeven interval, dan kunnen we daaruit dus nog 3 andere intervallen afleiden. Dit is van belang wanneer we denken aan het denkbeeldig construeren van een gegeneraliseerd toetsenbord, hetgeen in de volgend delen van deze beschouwing uitvoerig aan de orde zal komen. Deze denkbeeldige constructie wordt dan gedacht afgeleid te zijn van een projectie van intervalreeksen (exponentieel) in een logarithmische schaalverdeling op de planimetrie van het toetsenbord, waarbij er dus enkel zuivere intervallen voorkomen. In het geval dat we uitgaan van een octaaf verkrijgen wij aldus enkel pythagoreïsche intervallen, 3-limit.

Uit een gegeven interval kunnen 3 andere intervallen worden afgeleid. Om deze drie intervallen te benoemen, stel ik voor gebruik te maken van reeds bestaande musicologische termen en deze te generaliseren. Dit betekent, uitgaande van een octaaf, dat de kwint de major wordt genoemd, de kwart de minor, en de pythagoreïsche hele toon het leidtoon-interval. Hetzelfde geldt wanneer we ieder ander interval als uitgangspunt nemen: Visueel-planimetrisch geldt dan: **interval = major + minor; leidtoon = major – minor.** Wiskundig geldt voor de intervalsverhoudingen: **interval = major . minor; leidtoon = major / minor.** In formule uitgewerkt aldus:

interval	$= (x^2 + x)(x^2 - x) = (x + 1)(x - 1)$
rekenkundig midden	$= x^2$
harmonisch midden	$= (x^2 - 1)$
major	$= x/(x-1)$ of $(x^2+x)/(x^2-1)$
minor	$= (x+1)/x$ of $(x^2-1)/(x^2-x)$
leidtooninterval	$= x^2/(x^2 - 1)$

Vervolgens kunnen we ons bezighouden met de vraag hoeveel maal een leidtoon-interval binnen een major of minor-interval past. Welke waarde bedraagt in dat geval de exponent van het leidtoon-interval? De inductieve methode leidt bij de beantwoording van deze vraag tot de navolgende uitkomst:

major: x
minor: x-1

Dit wil zeggen dat, wanneer het exponent van het leidtoon-interval groter is dan voornoemde waarden, de totale uitkomst ook groter is dan het interval waarvan deze is afgeleid. De exponentiële reeksen van het leidtoon-interval en hun verhouding tot het interval waarvan deze is afgeleid, staan centraal in de benadering van deze beschouwing. Het aantal leidtoon-intervallen binnen het gehele interval bedraagt dus x + x – 1 = 2x –1. Gaan we uit van het octaaf (= 2/1), dan past het leidtoon-interval (= 8/9) dus (2 **.** 3 – 1) = 5 maal binnen het octaaf, dus net niet 6 maal ! Het interval $(9/8)^5$ = 1,802032470703125 …. , en $(9/8)^6$ = 2, 027286529541015625…; in het eerste geval kleiner dan 2/1 en in het tweede geval groter dan 2/1. Exact is het aantal malen dat een leidtoon-interval past binnen een interval, gelijk aan de logarithme uit dat interval, waarbij het leidtoon-interval het grondtal is, hetgeen equivalent is aan: log interval/log leidtoon. De uitkomst is dan groter dan 2x-1.
Het aantal keren dat een pythagoreïsche hele toon past in een octaaf bedraagt is: 5, 8849192361711855097434806477783… , dat wil zeggen: het aantal malen dat de pythagoreïsche hele toon op logarithmische schaal afgebeeld kan worden binnen een octaaf. Behalve de vaststelling dat er in een gegeven interval (2x-1) leidtoon-intervallen passen, moet er ook op worden gewezen dat de afbeelding van deze leidtoon-intervallen binnen dit gegeven interval zodanig is, dat er sprake is van 2 rijen. Immers, wanneer we uitgaan van het harmonisch midden van een interval, dan kunnen we dit als beginpunt beschouwen van een rij leidtoon-intervallen, waarin ook het rekenkundig midden van het interval is opgenomen. Ook het begin van het gegeven interval is het startpunt van een rij leidtoon-intervallen. Beide rijen overlappen elkaar dus dakpansgewijs wanneer we deze grafisch in een logarithmische schaalverdeling afbeelden. Hiermee komen we dus op een definitie van het begrip rij in het kader van toetsenplanimetrie: een rij is een opeenvolging van toetsen, die leidtoon-intervallen vormen. Alle andere opvolgingen van aaneengesloten toetsen kunnen wij als kolommen beschouwen.

Zowel rijen als kolommen vertegenwoordigen eveneens bepaalde vectoriële richtingen op de toetsenbordplanimetrie. De toetsenplanimetrie wordt volledig bepaald door deze twee gegevens, namelijk het aantal leidtoon-intervallen binnen een gegeven interval en 2 aan elkaar evenwijdige rijen van toetsen die de opeenvolging uitbeelden van leidtoon-intervallen op logarithmische schaal.

Voor de verdere begripsvorming met betrekking tot de hierna te bespreken probleemstelling aangaande gegeneraliseerde toetsenborden, is het van belang stil te staan bij het begrip invariantie en in samenhang daarmee de rij of de reeks van Fibonacci.
De **rij van Fibonacci** is genoemd naar Leonardo van Pisa, bijgenaamd Fibonacci, die de rij noemt in zijn boek *Liber abaci*. In woorden is elk element van de rij steeds de som van de twee voorgaande elementen, beginnend met 0 en 1. De rij blijkt interessante eigenschappen en verbanden te bezitten met onder andere de gulden snede. De eerste elementen van de rij zijn dan als volgt:

> 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765, 10946, ...

Het is evenwel niet duidelijk wie als eerste de rij heeft uitgedacht. Toen Fibonacci 20 jaar was, ging hij naar Algerije waar hij Indiase en Arabische wiskunde bestudeerde. Wellicht leerde hij daar de rij kennen. Men laat de rij ook wel met 1 en 1 beginnen in plaats van 0 en 1.

Invariantie.
\`Invariantie\` is een begrip uit de wiskunde en de theoretische natuurkunde. Invariantie houdt in dat de natuurwetten niet afhankelijk mogen zijn van de coördinaten waarin deze geformuleerd worden, en vooral bij verandering van referentiestelsel. Het begrip is voor het eerst geformuleerd door Galileo Galilei.

<u>Christiaan Huygens</u>

Zijn betekenis wordt hoog aangeslagen door de fysicus Vincent Icke. Huygens moet zich bewust zijn geweest van het eerder door Galileo Galilei geformuleerde relativiteitsbeginsel dat betrekking heeft op coördinatenstelsels die zich ten opzichte van elkaar met eenparige snelheid bewegen. Huygens ontwikkelde voortgaande op dit beginsel zijn eigen relativiteitstheorie. ‘Motus inter corpora relativus tantum est,’ schrijft Huygens: *De onderlinge beweging van voorwerpen is in alle opzichten relatief.* Dat is een belangrijk inzicht. Het was bovendien dapper om dat te beweren. Icke vindt deze vondst zo knap dat hij er geen worden voor heeft. Nog een citaat: ‘Quidnam in corporibus quies sit, aut motus nisi aliorum corporum respectu non videtur intellegi posse.’: *Het lijkt niet mogelijk vast te stellen of lichamen stilstaan of bewegen, tenzij ten opzichte van elkaar.* Huygens benadrukt dat enkele zinnen daarna nog eens. We hoeven niet na te gaan of iets in het Heelal nu ‘eigenlijk’ stilstaat of niet. Dat is helemaal niet waarneembaar. Daarin is Huygens heel modern. De aanpak van Huygens heeft uiteindelijk geleid tot de wetten van de mechanische beweging. Bij experimenten van botsingen tussen deeltjes blijkt dat niet de snelheid, maar het *product van massa en snelheid* behouden blijft. Impuls is de grootheid massa maal snelheid. Daarbij moet men de maat van de hoeveelheid materie, *massa*, definiëren.

Later heeft men laten zien dat er ook een relativiteit van de tijd is. Als je bij alle tijden in een fysisch proces eenzelfde hoeveelheid optelt, dan verandert er niets. Bovendien heeft tijd geen voorkeursrichting. Newton en Leibniz hebben een vorm van wiskunde bedacht die het mogelijk maakte om de veranderingen van plaats en snelheid te berekenen, waarmee de mechanica in essentie compleet was. Toch lijkt het niet het ontwikkelen van de wiskunde die het moeilijkst was: 'Non est mathematica difficilis materia, sed physica aut metaphysica.' schreef Huygens al: *Wiskunde is niet moeilijk, natuurkunde en metafysica wel.*
Een belangrijk inzicht van Huygens komt tot uitdrukking in zijn golf-theorie van het licht, die een brug vormt naar Maxwells theorie van elektromagnetische velden. Hij stond hiermee lijnrecht tegenover de theorie van Newton dat licht uit deeltjes zou bestaan. Toch lijken nu achteraf bezien zowel Huygens als Newton gelijk te hebben. Er bestaan deeltjes die niet kunnen stilstaan ten opzichte van wat dan ook. De bekendste leden van deze familie zijn lichtdeeltjes. Einstein postuleerde op basis van eerdere theorievorming met betrekking tot elektromagnetische verschijnselen dat de lichtsnelheid heel bijzonder is. Hij is namelijk in het luchtledige, onafhankelijk van de beweging van de lichtbron, overal gelijk, *invariant*. Einstein vroeg zich af hoe hij deze eigenschap kon inbouwen in de klassieke mechanica, die aan Huygens' relativiteitsprincipe gehoorzaamt. Licht beweegt altijd met de lichtsnelheid, ook ten opzichte van ander licht. Dit werk leidde tot de theorie die sindsdien bekend staat als de *speciale relativiteitstheorie* (1905). In die van Einstein is de lichtsnelheid als helemaal niet relatief (want absoluut) ingebouwd. Einsteins *algemene relativiteitstheorie* uit 1916 is volgens Vincent Icke op te vatten als een wiskundige vormgeving van Huygens' stelling over de relativiteit van alle beweging.

Vincent Icke over het verband tussen relativiteit en invariantie: "Invariantie wordt meestal gebruikt als we bedoelen dat een bepaald verschijnsel niet afhankelijk is van de schaalgrootte of de eenheid waarmee wordt gemeten. Het woord symmetrie komt te pas als we het hebben over een wiskundige bewerking, zoals verschuiving of draaiing. Relativiteit wordt vooral gebruikt met betrekking tot veranderingen van de snelheid."

N.B.: Over Huygens schreef Vincent Icke de boeken "Christiaan Huygens in de onvoltooid verleden toekomende tijd" en "De ruimte van Christiaan Huygens".

Door het gebruik van de pythagoreïsche komma ontdekte de Chinese wiskundige en muziektheoreticus Jing Fang (78 - 37 v.Chr.) dat 53 kwinten ongeveer 31 octaven benadert. Dit zou later leiden tot de ontdekking van evenredig zwevende stemming. Het werd lange tijd niet berekend, tot de Pruisische wiskundige Nikolaus Mercator dit in de 17e eeuw opnieuw deed. (Bron: http://nl.wikipedia.org/wiki/Geschiedenis_van_de_wiskunde) In dezelfde tijd dus dat Huygens, Newton en Leibniz leefden! Leibniz was een van de eerste grote Europese geesten die kennis maakte met de Chinese cultuur. En Leibniz en Huygens kenden elkaar! Hoe zou Huygens gereageerd hebben wanneer hij op de hoogte zou zijn geweest van de theorieën van Jing Fang? Zou hij dan een andere brief betreffende de harmonische cyclus hebben geschreven?