# Avicenne et le tétracorde

Franck Jedrzejewski

16 février 1997

Abstract

On présente dans cet article les aspects mathématiques de la théorie du tétracorde d'Avicenne. Dans sa théorie des genres, Avicenne n'a pas déterminé toutes les solutions des genres chromatiques et enharmoniques. Le modèle, que nous proposons, respecte les définitions d'Avicenne et conduit à déterminer six genres forts, dix genres chromatiques et dix genres enharmoniques, dont certains étaient connus de l'antiquité grecque. Nous appelons genres supplémentaires ces solutions qui n'étaient pas connues d'Avicenne ou qui n'ont pas été retenues. Cet article a été publié dans la revue Micromegas n° 2, en avril 1997.

## 1 Introduction

Ibn Sinâ Avicenne (980-1037) a écrit de grands ouvrages de philosophie, inspiré de l'enseignement d'Aristote. Parmi ceux-ci, le Livre de science [Avicenne] rédigé entre 412 et 428 de l'Hégire (1021-1037 de notre ère) est composé de deux volumes. Dans le premier sont rassemblées la Logique et la Métaphysique; dans le second, on trouve la Physique, les Mathématiques et la Musique. C'est la partie Musique qui retiendra notre attention et conduira à une relecture des systèmes acoustiques proposés par Avicenne.

"L'art de la musique, dit Avicenne, se compose de deux parties. La première est la composition, elle a pour objet les notes; elle examine leur état de consonance et de dissonance. La seconde est la rythmique : elle a pour objet les temps qui séparent les notes, les battements qui se succèdent ; elle examine leur état d'harmonie ou d'inharmonie". Dans cette première partie, Avicenne étudie les rapports de fréquence entre notes, distingue cinq rapports différents et précise la consonance de chacun.

- Le rapport multiple est un rapport dans lequel le numérateur est un multiple du dénominateur (exemple : $6/3$). Tous les termes en rapports multiples sont consonants.

- Le rapport superpartiel, "du même et une partie", est formé d'une unité et d'une fraction moindre que l'unité, de la forme $1 + 1/n$. Le ton (tanînî) a un rapport superpartiel ($9/8 = 1 + 1/8$). Tous les termes en rapport superpartiel sont consonants.

- Le rapport épimère, "du même et de plusieurs parties", est formé d'une unité et de plusieurs fractions de la forme $1 + k/n$. Lorsqu'il provient de fractions en progression naturelle paire de la forme $1 + (2p - 1)/2p$ (par exemple : $1 + 3/4$, $1 + 5/6$, etc.) ou en progression naturelle impaire de la forme $1 + (2p - 1)/(2p + 1)$ (par exemple : $1 + 3/5$), le rapport épimère est consonant.
- Le rapport multipartiel, "de plusieurs fois le même et d'une partie", est formé de plusieurs unités et d'une fraction moindre que l'unité, de la forme $m + 1/n$, (exemple $9/4 = 2 + 1/4$).
- Le rapport polyépimère, "de plusieurs fois le même et de plusieurs parties", est de la forme $m + k/n$ (exemple : $17/7 = 2 + 3/7$). Lorsqu'il est multiple d'un rapport superpartiel, le rapport polyépimère est consonant (exemple : $16/7 = 2(1 + 1/7)$ est consonant car 1+ 1/7 est un rapport superpartiel).

Les rapports acoustiques définissent non seulement la consonance, mais régissent également la constitution des genres. Le genre est fondé sur la subdivision de la quarte : "Dans l'intervalle de quarte, dit Avicenne, on peut insérer plusieurs sortes de trois intervalles, de telle manière que la quarte reste sans variation. Par conséquent, la quarte est comme le genre par rapport à ces espèces [les petits intervalles] qui y sont insérés. C'est pourquoi on l'a nommé genre." Avicenne choisit les rapports superpartiels qui déterminent les genres et distingue treize genres répartis en sept genres forts, quatre genres chromatiques et deux genres enharmoniques. Il construit, à partir des genres, un système acoustique sur deux octaves par assemblage de deux groupes formés chacun de deux tétracordes et d'un ton, à la manière du grand système (systema teleïon meïzon) de la théorie musicale grecque. Le groupe parfait s'étend sur deux octaves et compte 14 intervalles. Le groupe est disjoint lorsque "les deux octaves sont séparées par un intervalle de ton tanînî".

## 2 Les genres forts

Dans le genre fort, "le rapport d'aucun des intervalles n'est supérieur à celui de la somme des deux autres". Il y a sept genres forts qui divisent la quarte en rapports superpartiels. Si on note $(1 + 1/x)$, $(1 + 1/y)$ et $(1 + 1/z)$ les trois intervalles de la subdivision du tétracorde, le produit de ces rapports superpartiels est égal à une quarte juste de rapport acoustique $4/3$. D'où l'équation vérifiée par les entiers $x, y$ et $z$.

$$(1 + \frac{1}{x})(1 + \frac{1}{y})(1 + \frac{1}{z}) = \frac{4}{3} \qquad (1)$$

Cette équation s'écrit aussi sous la forme :

$$xyz/3 = (xy + xz + yz) + (x + y + z) + 1 \qquad (2)$$

Les genres forts font intervenir trois types de tierces mineures (obtenus pour x = 7, 8 ou 9). Dans les quatre premiers genres, la tierce a un rapport de 7/6. Dans les cinquième et sixième genres, elle vaut 32/27 et dans le septième genre, elle est égale à une tierce mineure naturelle (6/5). Le deuxième genre a les mêmes intervalles que le genre diatonique d'Archytas (430-360 av J.C.), fondé sur le tétracorde (28/27, 8/7, 9/8). Le troisième genre fort est le genre diatonique mou (malakôn) de Ptolémée. Ces résultats sont résumés dans les tableaux : dans la première colonne sont placés les rapports superpartiels indiquant les intervalles constitutifs du tétracorde. Dans la deuxième colonne, on trouve la valeur des rapports acoustiques des fréquences du genre, et dans la troisième colonne, les valeurs en cents de ces fréquences.

| Genre 1 | Freq. | Cents |
|---|---|---|
| 1+ 1/48 | 1 | 0 |
| 1+ 1/7 | 49/48 | 36 |
| 1+ 1/7 | 7/6 | 266 |
| | 4/3 | 498 |

| Genre 2 | Freq. | Cents |
|---|---|---|
| 1+ 1/27 | 1 | 0 |
| 1+ 1/8 | 28/27 | 63 |
| 1+ 1/7 | 7/6 | 266 |
| | 4/3 | 498 |

| Genre 3 | Freq. | Cents |
|---|---|---|
| 1+ 1/20 | 1 | 0 |
| 1+ 1/9 | 21/20 | 84 |
| 1+ 1/7 | 7/6 | 266 |
| | 4/3 | 498 |

Le cinquième genre fort est le genre diatonique de Didyme fondé sur le tétracorde (16/15, 10/9, 9/8). Ce genre a les mêmes intervalles que le genre diatonique tendu (syntonon) de Ptolémée.

| Genre 4 | Freq. | Cents |
|---|---|---|
| 1+ 1/12 | 1 | 0 |
| 1+ 1/13 | 13/12 | 139 |
| 1+ 1/7 | 7/6 | 266 |
| | 4/3 | 498 |

| Genre 5 | Freq. | Cents |
|---|---|---|
| 1+ 1/15 | 1 | 0 |
| 1+ 1/9 | 16/15 | 112 |
| 1+ 1/8 | 32/27 | 294 |
| | 4/3 | 498 |

Le septième genre fort est le genre diatonique régulier de Ptolémée, fondé sur le tétracorde (12/11, 11/10, 10/9).

| Genre 6 | Freq. | Cents |
|---|---|---|
| 1+ 1/13 | 1 | 0 |
| 1+ 1/10 | 14/13 | 128 |
| 1+ 1/8 | 32/27 | 294 |
| | 4/3 | 498 |

| Genre 7 | Freq. | Cents |
|---|---|---|
| 1+ 1/11 | 1 | 0 |
| 1+ 1/10 | 12/11 | 151 |
| 1+ 1/9 | 6/5 | 316 |
| | 4/3 | 498 |

Le sixième genre est un cas particulier car il est obtenu par approximation, en ce sens que le triplet (8, 10, 13) n'est pas solution de l'équation (1). En effet, si x et y sont des nombres connus, le troisième est donné par la relation

$$z = \frac{3(x+1)(y+1)}{x(y-3)-3(y+1)} \tag{3}$$

Si les deux premiers intervalles valent $x = 8$ et $y = 10$, le troisième doit valoir $z = 297/23$, c'est-à-dire $12{,}9$ qui n'est qu'une approximation de $13$ ; et non sa valeur exacte. Le sixième genre est donc une approximation de l'équation diophantine (1). Les autres genres correspondent à des solutions exactes et pour l'ensemble des genres forts, il n'y a pas d'autre solution.

## 3 Les genres chromatiques

Dans le genre chromatique, un des intervalles “est plus grand que la somme des deux autres”, et son rapport est plus petit que celui du double de la somme des deux autres. Avicenne distingue quatre genres chromatiques. Le premier genre est équivalent au genre chromatique d'Eratosthène et le deuxième genre chromatique est identique au genre chromatique tonié (syntonon) de Ptolémée.

| Genre 1 | Freq. | Cents |
|---|---|---|
| 1+ 1/19 | 1 | 0 |
| 1+ 1/18 | 20/19 | 89 |
| 1+ 1/5 | 10/9 | 182 |
| | 4/3 | 498 |

| Genre 2 | Freq. | Cents |
|---|---|---|
| 1+ 1/27 | 1 | 0 |
| 1+ 1/14 | 28/27 | 63 |
| 1+ 1/5 | 10/9 | 182 |
| | 4/3 | 498 |

Le quatrième genre chromatique est identique au genre chromatique mou (malakon) de Ptolémée.

| Genre 3 | Freq. | Cents |
|---|---|---|
| 1+ 1/14 | 1 | 0 |
| 1+ 1/15 | 15/14 | 119 |
| 1+ 1/ 6 | 8/7 | 231 |
| | 4/3 | 498 |

| Genre 4 | Freq. | Cents |
|---|---|---|
| 1+ 1/21 | 1 | 0 |
| 1+ 1/11 | 22/21 | 81 |
| 1+ 1/ 6 | 8/7 | 231 |
| | 4/3 | 498 |

## 4 Les genres enharmoniques

Dans le genre enharmonique ou relâché, “un des intervalles est plus grand que la somme des deux autres, alors que son rapport n'est pas plus petit que le double de la somme des deux autres”. Avicenne distingue deux genres enharmoniques. Le premier genre enharmonique a les mêmes intervalles que le genre enharmonique de Didyme et le deuxième genre est équivalent au genre enharmonique d'Eratosthène.

| Genre 1 | Freq. | Cents |
|---|---|---|
| 1+ 1/30 | 1 | 0 |
| 1+ 1/31 | 31/30 | 57 |
| 1+ 1/4 | 16/15 | 112 |
| | 4/3 | 498 |

| Genre 2 | Freq. | Cents |
|---|---|---|
| 1+ 1/45 | 1 | 0 |
| 1+ 1/23 | 46/45 | 38 |
| 1+ 1/4 | 16/15 | 112 |
| | 4/3 | 498 |

## 5 Les genres supplémentaires

Avec les définitions adoptées, Avicenne n'a pas déterminé toutes les solutions possibles des genres chromatiques et enharmoniques. En reformulant le problème en termes mathématiques, le modèle, que nous proposons, conduit à déterminer six genres forts, dix genres chromatiques et dix genres enharmoniques, dont certains étaient connus de l'antiquité grecque. Nous appelons genres complémentaires ou genres supplémentaires les solutions qui n'étaient pas connues d'Avicenne ou qui n'ont pas été retenues par Avicenne. Dans ce modèle, un triplet solution de l'équation dophantine (1) est un genre fort s'il vérifie pour toute permutation de $(x;y;z)$, l'inégalité

$$(1+\frac{1}{x}) \cdot (1+\frac{1}{y})(1+\frac{1}{z})$$

Les genres forts sont au nombre de six. Avicenne en dénombre sept, car il inclut l'approximation diophantine du sixième genre. Pour le genre chromatique, nous dirons qu'un genre est chromatique si le triplet $(x;y;z)$ est solution de l'équation diophantine (1) et si on peut trouver une permutation de $(x;y;z)$ pour laquelle les inégalités suivantes sont vérifiées

$$(1+\frac{1}{y})(1+\frac{1}{z}) \cdot (1+\frac{1}{x}) \cdot (1+\frac{1}{y})(1+\frac{1}{z})\big)^2$$

On dénombre alors six genres chromatiques supplémentaires fondés sur les tétracordes suivants :

| | | | |
|---|---|---|---|
| Genre 5 | (25/24, 16/15, 6/5) | Genre 8 | (100/9, 11/10, 6/5) |
| Genre 6 | (40/39, 13/12, 6/5) | Genre 9 | (36/35, 10/9, 7/6) |
| Genre 7 | (55/54, 12/11, 6/5) | Genre 10 | (64/63, 9/8, 7/6) |

Le cinquième genre chromatique a les mêmes intervalles que le genre chromatique de Didyme, fondé sur le tétracorde (16/15, 25/24, 6/5). Enfin, un genre est dit enharmonique si le triplet $(x;y;z)$ est solution de l'équation diophantine (1) et si on peut trouver une permutation de $(x;y;z)$ pour laquelle l'inégalité suivante est vérifiée

$$(1+\frac{1}{x}) ¸ (1+\frac{1}{y})(1+\frac{1}{z})\big)^2$$

On dénombre alors huit genres enharmoniques supplémentaires présentés dans le tableau suivant

| | | | |
|---|---|---|---|
| Genre 3 | (36/35, 28/27, 5/4) | Genre 7 | (76/75, 20/19, 5/4) |
| Genre 4 | (40/39, 26/25, 5/4) | Genre 8 | (96/95, 19/18, 5/4) |
| Genre 5 | (56/55, 22/21, 5/4) | Genre 9 | (136/135, 18/17, 5/4) |
| Genre 6 | (64/63, 21/20, 5/4) | Genre 10 | (256/255, 17/16, 5/4) |

Le troisième genre enharmonique complémentaire a les mêmes intervalles que le genre enharmonique d'Archytas.

# 6 Conclusion

L'étude analytique des genres d'Avicenne montre l'existence de tétracordes nouveaux dans le domaine chromatique et enharmonique. Nous ne savons pas si Avicenne connaissait ces genres complémentaires. Mais, il est certain qu'il cherchait une généralisation des théories grecques qui n'a pas été reprise au Moyen-Age. La restitution et la modélisation mathématique qui est proposée des genres d'Avicenne révèlent la beauté et la complexité de ses théories musicales.

## References

[1] Avicenne (Ibn Sinâ). Le Livre de science, Dânesh-nâmè, Paris, Les Belles Lettres, Collection Guillaume Budé, 2 vol., 1955.

[2] Bélis (Annie). Aristoxène de Tarente et Aristote : Le Traité d'harmonique. Paris, Klincksieck, 1986.

[3] Chailley (Jacques). La musique grecque antique, Les Belles lettres, Paris, 1979.

[4] Drieberg (Friedrich von). Die mathematische Intervallenlehre der Griechen, Berlin, 1818.

[5] Drieberg (Friedrich von). Aufschlüsse über die Musik der Griechen, Leipzig, 1819.

[6] Lindley (Mark), Turner-Smith (Ronald). Mathematical Models of Musical Scales: A New Approach, Orpheus-Schriftenreihe zu Grundfragen der Musik vol. 66, Verlag für systematische Musikwissenschaft, Bonn, Germany, 1993.

[7] Schlesinger (Kathleen). The Greek aulos, a study of its mechanism and of its relation to the modal system of Ancient Greek music, London, Methuen, 1939.

[8] Tanner (Robert) La musique antique grecque, expliquée par une conséquence de la théorie psycharithmétique. Richard Masse, Paris 1961.

[9] Vogel (Martin). Die Enharmonik der Griechen, 2 vol, Düsseldorf, 1963.